1Ш

УДК 004.42:510.69

С.С. Шкільняк
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Україна
Україна, 01601, м. Київ, вул. Володимирська, 60

Побудова секвенційних числень логік квазіарних предикатів першого порядку

S.S. Shkilniak
Taras Shevchenko National University of Kyiv
Ukraine, 01601, Kyiv, Volodymyrska st., 60

Construction of Sequent Calculi for First-order Logics of Quasiary Predicates

С.С. Шкильняк
Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко, Украина
Украина, 01601, г. Киев, ул. Владимирская, 60

Построение секвенциальных исчислений логик квазиарных предикатов первого порядка

Досліджено першопорядкові композиційно-номінативні логіки квазіарних предикатів. Для різних відношень логічного наслідку в чистих першопорядкових логіках часткових однозначних, тотальних неоднозначних і часткових неоднозначних предикатів побудовано спеціальні секвенційні числення. Для таких числень доведено теореми коректності й повноти. Запропоновано низку секвенційних числень для чистих першопорядкових логік часткових предикатів з рівністю.
Ключові слова: логіка, предикат, логічний наслідок, секвенційне числення.

We study first-order composition-nominative logics of quasiary predicates. Special sequent calculi for various consequence relations in pure first-order logics of partial single-valued, total multiple-valued and partial multiple-valued predicates are constructed. For the defined calculi the soundness and completeness theorems are proved. We introduce a number of sequent calculi for pure first-order logics of partial predicates with equality.
Key words: logic, predicate, logical consequence, sequent calculus.

Исследованы первопорядковые композиционно-номинативные логики квазиарных предикатов. Для различных отношений логического следствия в чистых первопорядковых логиках частичных однозначных, тотальных неоднозначных и частичных неоднозначных предикатов построены специальные секвенциальные исчисления. Для таких исчислений доказаны теоремы корректности и полноты. Предложен ряд секвенциальных исчислений для чистых первопорядковых логик частичных предикатов с равенством.
Ключевые слова: логика, предикат, логическое следствие, секвенциальное исчисление.

Вступ

Ефективний пошук виведень вкрай необхідний для успішного розв’язання низки задач, що виникають у сучасних програмних та інформаційних системах. Потужним апаратом побудови виведень є числення секвенційного (ґенценівського) типу. Розроблено широкий спектр таких числень для різних класів програмно-орієнтованих логічних формалізмів – композиційно-номінативних логік квазіарних предикатів (див., напр., [1-5]). Секвенційні числення формалізують поняття логічного слідування, яке належить до

найфундаментальніших понять логіки. Уточнення цього поняття за допомогою відношень логічного наслідку та побудова нестандартних семантик для пропозиційної логіки вивчались О.Д. Смирновою [6]. Для першопорядкових логік квазіарних предикатів подібні семантики та відношення логічного наслідку запропоновано в [7]. Введено «істиннісний» $|=_T$, «хибнісний» $|=_F$, «сильний» $|=_{TF}$, «неспростовнісний» $|=_{Cl}$, «насичений» $|=_{Cm}$ логічні наслідки. У різних семантиках ці відношення мають різні властивості, зокрема, в класичній логіці, яка є логікою тотальних однозначних предикатів, усі вони збігаються. Зазначені відношення досліджено, зокрема, в [8], основна увага приділена вивченню властивостей, пов'язаних з елімінацією кванторів. Для цього використано запропоновані в [9] спеціальні предикати-індикатори εz, які визначають наявність значення для предметних імен (змінних).

Властивості відношень логічного наслідку для множин формул є семантичною основою побудови числень секвенційного типу.

Метою даної статті є побудова спеціальних секвенційних числень чистих першопорядкових композиційно-номінативних логік (скор. ЧКНЛ) квазіарних предикатів. Характерною їх особливістю є використання предикатів-індикаторів εz. Такі числення запропоновано для різних відношень логічного наслідку логік часткових однозначних, тотальних неоднозначних та часткових неоднозначних предикатів. Доведено коректність і повноту цих числень. Подібні секвенційні числення запропоновано для чистих першопорядкових логік часткових квазіарних предикатів з рівністю.

Поняття, які тут не визначаються, тлумачимо в сенсі робіт [1], [3], [4], [8]. Будемо дотримуватись позначень роботи [8], продовженням якої є дана стаття.

Нагадаємо визначення відношень логічного наслідку для множин формул.

Нехай $\Gamma, \Delta \subseteq Fr$ – множини формул мови ЧКНЛ, A – модель мови. Тоді задаємо:

$\Gamma\ _A|=_{Cl}\Delta$, якщо $\bigcap\limits_{\Phi\in\Gamma} T(\Phi_A) \cap \bigcap\limits_{\Psi\in\Delta} F(\Psi_A) = \varnothing$;

$\Gamma\ _A|=_{Cm}\Delta$, якщо $\bigcup\limits_{\Phi\in\Gamma} F(\Phi_A) \cup \bigcup\limits_{\Psi\in\Delta} T(\Psi_A) = {}^V A$;

$\Gamma\ _A|=_{T}\Delta$, якщо $\bigcap\limits_{\Phi\in\Gamma} T(\Phi_A) \subseteq \bigcup\limits_{\Psi\in\Delta} T(\Psi_A)$;

$\Gamma\ _A|=_{F}\Delta$, якщо $\bigcap\limits_{\Psi\in\Delta} F(\Psi_A) \subseteq \bigcup\limits_{\Phi\in\Gamma} F(\Phi_A)$;

$\Gamma\ _A|=_{TF}\Delta$, якщо $\Gamma\ _A|=_T\Delta$ та $\Gamma\ _A|=_F\Delta$.

Відношення логічного наслідку для множин формул $|=_{Cl}$, $|=_{Cm}$, $|=_T$, $|=_F$, $|=_{TF}$ визначаємо за такою схемою: $\Gamma\ |=_* \Delta$, якщо $\Gamma\ _A|=_* \Delta$ для кожної моделі мови A.

Для логік часткових однозначних предикатів (неокласична семантика, скор. НС) можна розглядати $|=_{Cl}$, $|=_T$, $|=_F$, $|=_{TF}$, відношення $|=_{Cm}$ порожнє. Традиційним є відношення $|=_{Cl}$, яке також називають відношенням неокласичного наслідку.

Для логік тотальних неоднозначних предикатів (дуальна до неокласичної пересичена семантика, скор. ПС) розглядаємо $|=_{Cm}$, $|=_T$, $|=_F$, $|=_{TF}$, відношення $|=_{Cl}$ порожнє.

Для логік часткових неоднозначних предикатів (загальна семантика, скор. ЗС) відношення $|=_T$, $|=_F$, $|=_{TF}$ збігаються, відношення $|=_{Cl}$ та $|=_{Cm}$ порожні. Для таких логік фактично маємо єдине змістовне відношення $|=_{TF}$.

Надалі, якщо інше окремо не зазначено, $|=$ позначає: $|=_{TF}$ для ЗС; одне із $|=_{Cl}$, $|=_T$, $|=_F$, $|=_{TF}$ для НС; одне із $|=_{Cm}$, $|=_T$, $|=_F$, $|=_{TF}$ для ПС.

Предикати-індикатори εz задаємо так: $T(\varepsilon z_A) = \{d \mid d(z)\uparrow\}$; $F(\varepsilon z_A) = \{d \mid d(z)\downarrow\}$.

Секвенційні числення чистих першопорядкових логік

Секвенції трактуємо як множини формул, специфікованих спеціальними символами ${}_{\vdash}$ та ${}_{\dashv}$. Будемо позначати секвенції як ${}_{\vdash}\Gamma{}_{\dashv}\Delta$, скорочено як Σ.

Для секвенції Σ введемо множини означених та неозначених предметних імен:

$$val(\Sigma) = \{x \in V \mid {}_{\dashv}\varepsilon x \in \Sigma\};\ unv(\Sigma) = \{x \in V \mid {}_{\vdash}\varepsilon x \in \Sigma\}.$$

Нехай $Un = unv(\Sigma)$, а R-формула (тобто вигляду $R_{\bar{b}}^{\bar{a}}\Phi$) $R_{s_1,\ldots s_k, y_1,\ldots y_n, v_1,\ldots v_m}^{r_1,\ldots r_k, x_1,\ldots x_n, u_1,\ldots u_m}\Phi$ така:

$$\{r_1,\ldots, r_k, s,\ldots, s_k, y_1,\ldots, y_n\} \subseteq Un,\ \{x_1,\ldots, x_n\} \cap Un = \varnothing,\ \{v_1,\ldots, v_m\} \cap Un = \varnothing.$$

Вираз $R_{\varepsilon,\ldots,\varepsilon,\, v_1,\ldots,v_m}^{x_1,\ldots x_n, u_1,\ldots,u_m}\Phi$, де ε позначає невизначене значення, назвемо *Un*-*unv*-формою формули $R_{s_1,\ldots s_k, y_1,\ldots y_n, v_1,\ldots v_m}^{r_1,\ldots r_k, x_1,\ldots x_n, u_1,\ldots u_m}\Phi$. *R*- формули Φ та Ψ *unv*- еквівалентні відносно *Un*, або *Un*-*unv*-еквівалентні, якщо Φ та Ψ мають однакові *Un*-*unv*-форми.

Секвенційні числення формалізують відношення логічного наслідку для множин формул, їх будуємо так: ${}_{\vdash}\Gamma{}_{\dashv}\Delta$ вивідна $\Leftrightarrow$ $\Gamma \models \Delta$. Аксіомами секвенційного числення є замкнені секвенції. Замкненість ${}_{\vdash}\Gamma{}_{\dashv}\Delta$ означає, що $\Gamma \models \Delta$.

Базова умова замкненості секвенції Σ:

C) існує формула Φ, така, що ${}_{\vdash}\Phi \in \Sigma$ та ${}_{\dashv}\Phi \in \Sigma$.

Додаткова умова замкненості секвенції ${}_{\vdash}\Gamma{}_{\dashv}\Delta$ із множиною $Un = unv({}_{\vdash}\Gamma{}_{\dashv}\Delta)$:

UnC) існують *Un*-*unv*-еквівалентні *R*-формули Φ та Ψ, такі, що $\Phi \in \mathbf{\Gamma}$ та $\Psi \in \mathbf{\Delta}$.

Наступні додаткові умови замкненості секвенції Σ індуковані відповідними властивостями *CL*, *CR*, *CLR* (див. [3]). Ці умови істотні для відношень $\models_T$, $\models_F$, $\models_{TF}$:

CL) існує формула Φ: ${}_{\vdash}\Phi \in \Sigma$ та ${}_{\vdash}\neg\Phi \in \Sigma$;

CR) існує формула Φ: ${}_{\dashv}\Phi \in \Sigma$ та ${}_{\dashv}\neg\Phi \in \Sigma$;

CLR) існують формули Φ та Ψ такі: ${}_{\vdash}\Phi \in \Sigma$, ${}_{\vdash}\neg\Phi \in \Sigma$, ${}_{\dashv}\Psi \in \Sigma$, ${}_{\dashv}\neg\Psi \in \Sigma$.

Залежно від відношення логічного наслідку та семантики для ЧКНЛ отримуємо різноманітні секвенційні числення. Низку таких числень збудовано [3] на базі спеціальних *X* – *Y*-означених відношень логічного наслідку. Числення, пропоновані в даній роботі, використовують предикати-індикатори ε*z* наявності значення для змінних.

Числення *QSC* формалізує:

– відношення $\models_{Cl}$ (НС) для ЧКНЛ однозначних часткових предикатів;

– відношення $\models_{Cm}$ (ПС) для ЧКНЛ неоднозначних тотальних предикатів.

Замкненість секвенції: умова $\mathrm{C} \vee \mathrm{UnC}$.

Числення *QSL* формалізує:

– відношення $\models_T$ (НС) для ЧКНЛ однозначних часткових предикатів;

– відношення $\models_F$ (ПС) для ЧКНЛ неоднозначних тотальних предикатів.

Замкненість секвенції: умова $\mathrm{C} \vee \mathrm{CL} \vee \mathrm{UnC}$.

Числення *QSR* формалізує:

– відношення $\models_F$ (НС) для ЧКНЛ однозначних часткових предикатів;

– відношення $\models_T$ (ПС) для ЧКНЛ неоднозначних тотальних предикатів.

Замкненість секвенції: умова $\mathrm{C} \vee \mathrm{CR} \vee \mathrm{UnC}$.

Числення *QSLR* формалізує відношення $\models_{TF}$ для ЧКНЛ однозначних часткових предикатів (НС) та неоднозначних тотальних предикатів (ПС).

Замкненість секвенції: умова $\mathrm{C} \vee \mathrm{CLR} \vee \mathrm{UnC}$.

Числення *QSG* формалізує відношення $\models_{TF}$ для загальної семантики ЧКНЛ неоднозначних часткових предикатів. Замкненість секвенції: умова $\mathrm{C} \vee \mathrm{UnC}$.

Наведемо базові секвенційні форми числень *QSL*, *QSR*, *QSLR*, *QSG*.

$$\vdash\text{RT}\ \frac{\vdash R^{\bar v}_{\bar x}(A),\Sigma}{\vdash R^{z,\bar v}_{z,\bar x}(A),\Sigma};\qquad \dashv\text{RT}\ \frac{\dashv R^{\bar v}_{\bar x}(A),\Sigma}{\dashv R^{z,\bar v}_{z,\bar x}(A),\Sigma};$$

$$\vdash\neg\text{RT}\ \frac{\vdash \neg R^{\bar v}_{\bar x}(A),\Sigma}{\vdash \neg R^{z,\bar v}_{z,\bar x}(A),\Sigma};\qquad \dashv\neg\text{RT}\ \frac{\dashv \neg R^{\bar v}_{\bar x}(A),\Sigma}{\dashv \neg R^{z,\bar v}_{z,\bar x}(A),\Sigma};$$

$$\vdash\Phi\text{N}\ \frac{\vdash R^{\bar v}_{\bar u}(A),\Sigma}{\vdash R^{y,\bar v}_{z,\bar u}(A),\Sigma};\qquad \dashv\Phi\text{N}\ \frac{\dashv R^{\bar v}_{\bar u}(A),\Sigma}{\dashv R^{y,\bar v}_{z,\bar u}(A),\Sigma};$$

$$\vdash\neg\Phi\text{N}\ \frac{\vdash \neg R^{\bar v}_{\bar u}(A),\Sigma}{\vdash \neg R^{y,\bar v}_{z,\bar u}(A),\Sigma};\qquad \dashv\neg\Phi\text{N}\ \frac{\dashv \neg R^{\bar v}_{\bar u}(A),\Sigma}{\dashv \neg R^{y,\bar v}_{z,\bar u}(A),\Sigma}.$$

Для форм типу ΦN та ¬ΦN умова: $y\in\nu(A)$.

$$\vdash\text{R}\exists\text{R}\ \frac{\vdash R^{\bar u}_{\bar v}(\exists xA),\Sigma}{\vdash R^{\bar u,x}_{\bar v,y}(\exists xA),\Sigma};\qquad \dashv\text{R}\exists\text{R}\ \frac{\dashv R^{\bar u}_{\bar v}(\exists xA),\Sigma}{\dashv R^{\bar u,x}_{\bar v,y}(\exists xA),\Sigma};$$

$$\vdash\neg\text{R}\exists\text{R}\ \frac{\vdash \neg R^{\bar u}_{\bar v}(\exists xA),\Sigma}{\vdash \neg R^{\bar u,x}_{\bar v,y}(\exists xA),\Sigma};\qquad \dashv\neg\text{R}\exists\text{R}\ \frac{\dashv \neg R^{\bar u}_{\bar v}(\exists xA),\Sigma}{\dashv \neg R^{\bar u,x}_{\bar v,y}(\exists xA),\Sigma};$$

$$\vdash\text{R}\exists\text{p}\ \frac{\vdash \exists xA,\Sigma}{\vdash R^{x}_{y}(\exists xA),\Sigma};\qquad \dashv\text{R}\exists\text{p}\ \frac{\dashv \exists xA,\Sigma}{\dashv R^{x}_{y}(\exists xA),\Sigma};$$

$$\vdash\neg\text{R}\exists\text{p}\ \frac{\vdash \neg\exists xA,\Sigma}{\vdash \neg R^{x}_{y}(\exists xA),\Sigma};\qquad \dashv\neg\text{R}\exists\text{p}\ \frac{\dashv \neg\exists xA,\Sigma}{\dashv \neg R^{x}_{y}(\exists xA),\Sigma}.$$

$$\vdash\neg\neg\ \frac{\vdash A,\ \Sigma}{\vdash \neg\neg A,\ \Sigma};\qquad \dashv\neg\neg\ \frac{\dashv A,\ \Sigma}{\dashv \neg\neg A,\ \Sigma};$$

$$\vdash\vee\ \frac{\vdash A,\ \Sigma \qquad \vdash B,\ \Sigma}{\vdash A\vee B,\ \Sigma};\qquad \dashv\vee\ \frac{\dashv A,\ \dashv B,\ \Sigma}{\dashv A\vee B,\ \Sigma};$$

$$\vdash\neg\vee\ \frac{\vdash \neg A,\ \vdash \neg B,\ \Sigma}{\vdash \neg(A\vee B),\ \Sigma};\qquad \dashv\neg\vee\ \frac{\dashv \neg A,\ \Sigma \qquad \dashv \neg B,\ \Sigma}{\dashv \neg(A\vee B),\ \Sigma};$$

$$\vdash\text{RR}\ \frac{\vdash R^{\bar v}_{\bar x}\circ^{\bar w}_{\bar y}(A),\Sigma}{\vdash R^{\bar v}_{\bar x}(R^{\bar w}_{\bar y}(A)),\Sigma};\qquad \dashv\text{RR}\ \frac{\dashv R^{\bar v}_{\bar x}\circ^{\bar w}_{\bar y}(A),\Sigma}{\dashv R^{\bar v}_{\bar x}(R^{\bar w}_{\bar y}(A)),\Sigma};$$

$$\vdash\neg\text{RR}\ \frac{\vdash \neg R^{\bar v}_{\bar x}\circ^{\bar w}_{\bar y}(A),\Sigma}{\vdash \neg R^{\bar v}_{\bar x}(R^{\bar w}_{\bar y}(A)),\Sigma};\qquad \dashv\neg\text{RR}\ \frac{\dashv \neg R^{\bar v}_{\bar x}\circ^{\bar w}_{\bar y}(A),\Sigma}{\dashv \neg R^{\bar v}_{\bar x}(R^{\bar w}_{\bar y}(A)),\Sigma};$$

$$\vdash\text{R}\neg\ \frac{\vdash \neg R^{\bar v}_{\bar x}(A),\Sigma}{\vdash R^{\bar v}_{\bar x}(\neg A),\Sigma};\qquad \dashv\text{R}\neg\ \frac{\dashv \neg R^{\bar v}_{\bar x}(A),\Sigma}{\dashv R^{\bar v}_{\bar x}(\neg A),\Sigma};$$

$$\vdash\neg\text{R}\neg\ \frac{\vdash R^{\bar v}_{\bar x}(A),\Sigma}{\vdash \neg R^{\bar v}_{\bar x}(\neg A),\Sigma};\qquad \dashv\neg\text{R}\neg\ \frac{\dashv R^{\bar v}_{\bar x}(A),\Sigma}{\dashv \neg R^{\bar v}_{\bar x}(\neg A),\Sigma};$$

$$\vdash\text{R}\vee\ \frac{\vdash R^{\bar v}_{\bar x}(A)\vee R^{\bar v}_{\bar x}(B),\Sigma}{\vdash R^{\bar v}_{\bar x}(A\vee B),\Sigma};\qquad \dashv\text{R}\vee\ \frac{\dashv R^{\bar v}_{\bar x}(A)\vee R^{\bar v}_{\bar x}(B),\Sigma}{\dashv R^{\bar v}_{\bar x}(A\vee B),\Sigma};$$

$$\vdash\neg\mathrm{R}\vee\ \frac{\vdash\neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(A), \neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(B), \Sigma}{\vdash\neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(A\vee B), \Sigma};\qquad \dashv\neg\mathrm{R}\vee\ \frac{\dashv\neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(A), \Sigma \quad \dashv\neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(B), \Sigma}{\dashv\neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(A\vee B), \Sigma}.$$

$$\vdash\exists\varepsilon\ \frac{\vdash R_{z}^{x}(A), \dashv\varepsilon z, \Sigma}{\vdash\exists xA, \Sigma};\qquad \dashv\neg\exists\varepsilon\ \frac{\dashv\neg R_{z}^{x}(A), \dashv\varepsilon z, \Sigma}{\dashv\neg\exists xA, \Sigma};$$

$$\vdash\exists\mathrm{R}\varepsilon\ \frac{\vdash R_{\bar{v},z}^{\bar{u},x}(A), \dashv\varepsilon z, \Sigma}{\vdash R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists xA), \Sigma};\qquad \dashv\neg\exists\mathrm{R}\varepsilon\ \frac{\dashv\neg R_{\bar{v},z}^{\bar{u},x}(A), \dashv\varepsilon z, \Sigma}{\dashv\neg R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists xA), \Sigma};$$

$$\dashv\exists\mathrm{f}\ \frac{\dashv\exists xA, \dashv R_{z}^{x}(A), \dashv\varepsilon z, \Sigma}{\dashv\exists xA, \Sigma};\qquad \vdash\neg\exists\mathrm{f}\ \frac{\vdash\neg\exists xA, \vdash\neg R_{z}^{x}(A), \dashv\varepsilon z, \Sigma}{\vdash\neg\exists xA, \Sigma};$$

$$\dashv\exists\mathrm{Rf}\ \frac{\dashv R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists xA), \dashv R_{\bar{v},z}^{\bar{u},x}(A), \dashv\varepsilon z, \Sigma}{\dashv R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists xA), \Sigma};\qquad \vdash\neg\exists\mathrm{Rf}\ \frac{\vdash\neg R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists xA), \vdash\neg R_{\bar{v},z}^{\bar{u},x}(A), \dashv\varepsilon z, \Sigma}{\vdash\neg R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists xA), \Sigma}.$$

Для форм $\vdash\exists\varepsilon$, $\dashv\neg\exists\varepsilon$, $\dashv\exists\mathrm{f}$, $\vdash\neg\exists\mathrm{f}$ умова: $z\in V_T$, $z\notin nm(\Sigma, \exists xA)$. Для $\vdash\exists\mathrm{R}\varepsilon$, $\dashv\neg\exists\mathrm{R}\varepsilon$, $\dashv\exists\mathrm{Rf}$, $\vdash\neg\exists\mathrm{Rf}$ умова: $z\in V_T$, $z\notin nm(\Sigma, R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists xA))$. Форми $\dashv\exists\mathrm{f}$, $\vdash\neg\exists\mathrm{f}$, $\dashv\exists\mathrm{Rf}$, $\vdash\neg\exists\mathrm{Rf}$ – це форми типу $\exists\mathrm{f}$, для них додаткова умова: Σ не містить символів вигляду εz.

$$\dashv\exists\mathrm{v}\ \frac{\dashv\exists xA, \dashv R_{y}^{x}(A), \dashv\varepsilon y, \Sigma}{\dashv\exists xA, \dashv\varepsilon y, \Sigma};\qquad \vdash\neg\exists\mathrm{v}\ \frac{\vdash\neg\exists xA, \vdash\neg R_{y}^{x}(A), \dashv\varepsilon y, \Sigma}{\vdash\neg\exists xA, \dashv\varepsilon y, \Sigma};$$

$$\dashv\exists\mathrm{Rv}\ \frac{\dashv R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists xA), \dashv R_{\bar{v},y}^{\bar{u},x}(A), \dashv\varepsilon y, \Sigma}{\dashv R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists xA), \dashv\varepsilon y, \Sigma};\qquad \vdash\neg\exists\mathrm{Rv}\ \frac{\vdash\neg R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists xA), \vdash\neg R_{\bar{v},y}^{\bar{u},x}(A), \dashv\varepsilon y, \Sigma}{\vdash\neg R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists xA), \dashv\varepsilon y, \Sigma}.$$

Форми $\dashv\exists\mathrm{v}$, $\vdash\neg\exists\mathrm{v}$, $\dashv\exists\mathrm{Rv}$, $\vdash\neg\exists\mathrm{Rv}$ – це форми типу $\exists\mathrm{v}$.

$$\dashv\exists\mathrm{d}\ \frac{\vdash\varepsilon y, \dashv\exists xA, \Sigma \qquad \dashv\exists xA, \dashv R_{y}^{x}(A), \dashv\varepsilon y, \Sigma}{\dashv\exists xA, \Sigma};$$

$$\vdash\neg\exists\mathrm{d}\ \frac{\vdash\varepsilon y, \vdash\neg\exists xA, \Sigma \qquad \vdash\neg\exists xA, \vdash\neg R_{y}^{x}(A), \dashv\varepsilon y, \Sigma}{\vdash\neg\exists xA, \Sigma};$$

$$\dashv\exists\mathrm{Rd}\ \frac{\vdash\varepsilon y, \dashv R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists xA), \Sigma \qquad \dashv R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists xA), \dashv R_{\bar{v},y}^{\bar{u},x}(A), \dashv\varepsilon y, \Sigma}{\dashv R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists xA), \Sigma};$$

$$\vdash\neg\exists\mathrm{Rd}\ \frac{\vdash\varepsilon y, \vdash\neg R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists xA), \Sigma \qquad \vdash\neg R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists xA), \vdash\neg R_{\bar{v},y}^{\bar{u},x}(A), \dashv\varepsilon y, \Sigma}{\vdash\neg R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists xA), \Sigma}.$$

Форми $\dashv\exists\mathrm{d}$, $\vdash\neg\exists\mathrm{d}$, $\dashv\exists\mathrm{Rd}$, $\vdash\neg\exists\mathrm{Rd}$ – це форми типу $\exists\mathrm{d}$. Для цих форм умова: εy не входить до Σ та Σ містить символи вигляду εz.

$\vdash\exists\mathrm{R}\varepsilon$, $\dashv\neg\exists\mathrm{R}\varepsilon$, $\vdash\exists\varepsilon$, $\dashv\neg\exists\varepsilon$ – це $\exists_{\mathrm{T}}$-форми; форми типів $\exists\mathrm{f}$, $\exists\mathrm{v}$, $\exists\mathrm{d}$ – це $\exists_{\mathrm{F}}$-форми.

Форми типів RT, ¬RT, ΦN, ¬ΦN, R∃R, ¬R∃R, R∃p, ¬R∃p – *допоміжні*, інші базові секвенційні форми – *основні*.

Зауважимо, що символи εy можуть фігурувати в секвенціях лише в складі $\vdash\varepsilon y$ та $\dashv\varepsilon y$, які індукуються формами елімінації кванторів.

Базовими секвенційними формами числення *QSC* є $\vdash$RT, $\dashv$RT, $\vdash$ΦN, $\vdash$ΦN, $\vdash$R∃R, $\dashv$R∃R, $\vdash$R∃p, $\dashv$R∃p, $\vdash\neg$, $\dashv\neg$, $\vdash\vee$, $\dashv\vee$, $\vdash$RR, $\dashv$RR, $\vdash$R¬, $\dashv$R¬, $\vdash$R∨, $\dashv$R∨, $\vdash\exists\varepsilon$, $\vdash\exists\mathrm{R}\varepsilon$, $\dashv\exists\mathrm{f}$, $\dashv\exists\mathrm{Rf}$, $\dashv\exists\mathrm{v}$, $\dashv\exists\mathrm{Rv}$, $\dashv\exists\mathrm{d}$, $\dashv\exists\mathrm{Rd}$. Форми для зовнішнього заперечення тут не потрібні.

Форми $_{|-}\neg$ та $_{-|}\neg$ мають традиційний вигляд: $_{|-}\neg\ \dfrac{_{-|}A,\ \Sigma}{_{|-}\neg A,\ \Sigma}$; $_{-|}\neg\ \dfrac{_{|-}A,\ \Sigma}{_{-|}\neg A,\ \Sigma}$.

Теорема 1. Нехай $\dfrac{_{|-}\Lambda_{-|}\mathrm{K}}{_{|-}\Gamma_{-|}\Delta}$ та $\dfrac{_{|-}\Lambda_{-|}\mathrm{K}\quad _{|-}\mathrm{X}_{-|}\mathrm{Z}}{_{|-}\Gamma_{-|}\Delta}$ – базові секвенційні форми. Тоді:

1) $\Lambda \models \mathrm{K} \Rightarrow \Gamma \models \Delta$; $\Lambda \models \mathrm{K}$ та $\mathrm{X} \models \mathrm{Z} \Rightarrow \Gamma \models \Delta$;

2) $\Gamma \not\models \Delta \Rightarrow \Lambda \not\models \mathrm{K}$; $\Gamma \not\models \Delta \Rightarrow \Lambda \not\models \mathrm{K}$ або $\mathrm{X} \not\models \mathrm{Z}$.

Коректність та повнота секвенційних числень

Розглянемо процедуру побудови секвенційного дерева. Така процедура розбита на етапи, вона починається з кореня дерева. Кожне застосування секвенційної форми проводиться до скінченної множини доступних на даний момент формул. Перед побудовою зафіксуємо нескінченний список *TN* тотально (строго) неістотних [3] імен, такий, що $nm(\Sigma)\cap TN = \varnothing$. На початку кожного етапу виконується крок доступу – до списку доступних додаємо по одній формулі зі списків *T*-формул та *F*-формул. На початку побудови доступна лише пара перших формул списків.

Якщо всі листи замкнені, то процедура завершена позитивно, маємо замкнене секвенційне дерево. Якщо ні, то у випадку виведення скінченної секвенції перевіряємо, чи є хоч один із листів фінальною секвенцією (незамкнена секвенція Ω фінальна, якщо до неї незастосовна жодна форма, або кожне застосування форми до Ω не вводить формул, відмінних від формул шляху від кореня до Ω).

Якщо процедура не завершена, то для кожного незамкненого листа ξ робимо наступний крок доступу, після чого добудовуємо скінченне піддерево з вершиною ξ таким чином. Активізуємо всі доступні (окрім примітивних [3]) формули ξ. Далі до кожної активної формули застосовуємо відповідну основну форму. За потреби застосовуємо допоміжні форми. Після застосування основної форми утворені нею формули пасивні, до них на даному етапі основні форми вже не застосовуються.

Спочатку виконуємо (за можливості) всі $\exists_T$-форми. При кожному такому застосуванні беремо зі списку *TN* нове тотально неістотне ім'я *z* як перше незадіяне на шляху від кореня до даної вершини. Потім застосовуємо форми типу RR, ¬RR, R¬, ¬R¬, R∨, ¬R∨, ¬¬, ∨, ¬∨. Далі застосовуємо $\exists_F$-форми таким чином. Якщо в момент першого такого застосування серед доступних формул секвенції ще немає формул вигляду $_{-|}\varepsilon y$ чи $_{-|}\varepsilon y$, то застосовуємо відповідну форму типу ∃f. Потім застосовуємо форми типу ∃v для всіх *y*, таких, що $_{-|}\varepsilon y$ є доступними *F*-формулами секвенції. Далі, при наявності серед доступних формул хоч однієї формули вигляду $_{-|}\varepsilon z$ чи $_{-|}\varepsilon z$, застосовуємо форми типу ∃d. Таку форму застосовуємо для всіх $y \in nm(\Sigma_0)$ таких, що Σ_0 – множина доступних на даний момент формул, – не містить жодних $_{-|}\varepsilon y$ чи $_{-|}\varepsilon y$.

Після виконання кожної форми перевіряємо на замкненість секвенції-вершини. При появі замкненої секвенції, до неї незастосовна жодна форма, побудова дерева на цьому шляху обривається. Повтори формул у секвенціях усуваємо.

Якщо процедура побудови дерева для секвенції Σ завершена позитивно, то отримано скінченне замкнене дерево. Якщо процедура завершена негативно (маємо скінченне незамкнене дерево), або не завершується (маємо нескінченне дерево), то у дереві існує незамкнений шлях $\wp$, всі його вершини – незамкнені секвенції. Кожна з формул секвенції Σ зустрінеться на $\wp$ і стане доступною.

Теорема 2 (коректності). 1) $\vdash\Gamma\dashv\Delta$ вивідна в численні $QSG \Rightarrow \Gamma \models_{TF} \Delta$ в ЗС;

2) $\vdash\Gamma\dashv\Delta$ вивідна в численні $QSL \Rightarrow \Gamma \models_{T} \Delta$ в НС та $\Gamma \models_{F} \Delta$ в ПС;

3) $\vdash\Gamma\dashv\Delta$ вивідна в численні $QSR \Rightarrow \Gamma \models_{F} \Delta$ в НС та $\Gamma \models_{T} \Delta$ в ПС;

4) $\vdash\Gamma\dashv\Delta$ вивідна в численні $QSLR \Rightarrow \Gamma \models_{TF} \Delta$ в НС та $\Gamma \models_{TF} \Delta$ в ПС;

5) $\vdash\Gamma\dashv\Delta$ вивідна в численні $QSC \Rightarrow \Gamma \models_{Cl} \Delta$ в НС та $\Gamma \models_{Cm} \Delta$ в ПС.

Справді, нехай $\vdash\Gamma\dashv\Delta$ вивідна, тоді для неї побудоване замкнене секвенційне дерево. Для кожної його вершини $\vdash\Lambda\dashv\mathrm{K}$ маємо $\Lambda \models \mathrm{K}$. Для листів дерева це випливає з їх замкненості. Збереження формами відповідних відношень логічного наслідку (від засновків до висновків) випливає з теореми 1. Отже, $\Gamma \models \Delta$.

Повнота побудованих числень доводиться на основі відповідних теорем про існування контрмоделі для множини формул незамкненого шляху секвенційного дерева. Доведення цих теорем спирається на відомий (див., напр., [6]) метод модельних множин; доведення подібних теорем про існування контрмоделі [3], [4].

Сформулюємо теорему про контрмодель для *QSL*, *QSR*, *QSLR*, *QSG*-числень.

Теорема 3. Нехай $\wp$ – незамкнений шлях у секвенційному дереві, збудованому для $\vdash\Gamma\dashv\Delta$, нехай H – множина всіх специфікованих формул – секвенцій цього шляху. Тоді існують моделі мови $\boldsymbol{A} = (A, I)$, $\boldsymbol{B} = (A, I)$ та існують $\delta, \eta \in {}^{V}A$ такі:

1) $\vdash\Phi \in H \Rightarrow \delta \in \boldsymbol{T}(\Phi_A)$ та $\dashv\Phi \in H \Rightarrow \delta \notin \boldsymbol{T}(\Phi_A)$;

2) $\vdash\Phi \in H \Rightarrow \eta \notin \boldsymbol{F}(\Phi_B)$ та $\dashv\Phi \in H \Rightarrow \eta \in \boldsymbol{F}(\Phi_B)$.

Такі пари $(\boldsymbol{A}, \delta)$ та $(\boldsymbol{B}, \eta)$ із даними властивостями називатимемо *T*-контрмоделлю та *F*-контрмоделлю для секвенції $\vdash\Gamma\dashv\Delta$.

Для *QSC*-числень теорема про контрмодель формулюється так.

Теорема 4. Нехай $\wp$ – незамкнений шлях у секвенційному дереві для $\vdash\Gamma\dashv\Delta$, H – множина всіх специфікованих формул – секвенцій цього шляху. Тоді існують моделі мови $A = (A, I)$, $B = (A, I)$ та існують $\delta, \eta \in {}^{V}A$ такі:

1) $\vdash\Phi \in H \Rightarrow \delta \in T(\Phi_A)$ та $\dashv\Phi \in H \Rightarrow \delta \in F(\Phi_A)$;

2) $\vdash\Phi \in H \Rightarrow \eta \notin F(\Phi_B)$ та $\dashv\Phi \in H \Rightarrow \eta \notin T(\Phi_B)$.

Такі пари (A, δ) та (B, η) назвемо *Cl*-контрмоделлю та *Cm*-контрмоделлю.

Теорема 5 (повноти). 1) $\Gamma \models_{TF} \Delta$ в ЗС $\Rightarrow \vdash\Gamma\dashv\Delta$ вивідна в численні *QSG*;

2) $\Gamma \models_{T} \Delta$ в НС $\Rightarrow \vdash\Gamma\dashv\Delta$ вивідна в численні *QSL*,
$\Gamma \models_{F} \Delta$ в ПС $\Rightarrow \vdash\Gamma\dashv\Delta$ вивідна в численні *QSL*;

3) $\Gamma \models_{F} \Delta$ в НС $\Rightarrow \vdash\Gamma\dashv\Delta$ вивідна в численні *QSR*,
$\Gamma \models_{T} \Delta$ в ПС $\Rightarrow \vdash\Gamma\dashv\Delta$ вивідна в численні *QSR*;

4) $\Gamma \models_{TF} \Delta$ в НС $\Rightarrow \vdash\Gamma\dashv\Delta$ вивідна в численні *QSLR*,
$\Gamma \models_{TF} \Delta$ в ПС $\Rightarrow \vdash\Gamma\dashv\Delta$ вивідна в численні *QSLR*;

5) $\Gamma \models_{Cl} \Delta$ в НС $\Rightarrow \vdash\Gamma\dashv\Delta$ вивідна в численні *QSC*,
$\Gamma \models_{Cm} \Delta$ в ПС $\Rightarrow \vdash\Gamma\dashv\Delta$ вивідна в численні *QSC*.

Доведемо п. 1. Припустимо супротивне: $\Gamma \models_{TF} \Delta$ і $\vdash\Gamma\dashv\Delta$ невивідна. Тоді в дереві для $\vdash\Gamma\dashv\Delta$ існує незамкнений шлях. Нехай H – множина всіх специфікованих формул секвенцій цього шляху. За теоремою 3 існують *T*-контрмодель (A, δ) та *F*-контрмодель (B, η) такі: $\vdash\Phi \in H \Rightarrow \delta \in T(\Phi_A)$ та $\dashv\Phi \in H \Rightarrow \delta \notin T(\Phi_A)$, $\vdash\Phi \in H \Rightarrow \eta \notin F(\Phi_B)$ та $\dashv\Phi \in H \Rightarrow$ $\Rightarrow \eta \in F(\Phi_B)$. Для *T*-контрмоделі згідно з $\vdash\Gamma\dashv\Delta \subseteq H$ маємо $\delta \in T(\Phi_A)$ для всіх $\Phi \in \Gamma$ та $\delta \notin T(\Psi_A)$. Для всіх $\Psi \in \Delta$. Звідси $\delta \in T(\bigcap_{\Phi\in\Gamma} T(\Phi_A))$ та $\delta \notin T(\bigcup_{\Psi\in\Delta} T(\Psi_A))$, що заперечує $\Gamma_A \models_T \Delta$, тому й $\Gamma \models_{TF} \Delta$. Для *F*-контрмоделі згідно з $\vdash\Gamma\dashv\Delta \subseteq H$ маємо $\eta \notin F(\Phi_B)$ для всіх $\Phi \in \Gamma$ та маємо

$\eta\in F(\Psi_B)$ для всіх $\Psi\in\Delta$. Звідси $\eta\notin F(\bigcap_{\Psi\in\Delta} F(\Psi_B))$ та $\eta\in F(\bigcup_{\Phi\in\Gamma} F(\Phi_B))$, що заперечує $\Gamma_B|=_F\Delta$, тому й $\Gamma|=_{TF}\Delta$.

Подібним чином доводяться пп. 2 – 5. При цьому для п. 4 існують обмеження на вибір контрмоделі. Якщо за умови HCL $\vee$ HCR невірна HCL (тоді маємо HCR), то для *T*-контрмоделі маємо неоднозначний предикат, а для *F*-контрмоделі – нетотальний; тому для логіки однозначних предикатів беремо лише *F*-контрмодель, а для логіки тотальних предикатів – лише *T*-контрмодель. Якщо за умови HCL $\vee$ HCR невірна HCR (тоді маємо HCL), то для *F*-контрмоделі маємо неоднозначний предикат, а для *T*-контрмоделі – нетотальний; тому для логіки однозначних предикатів беремо лише *T*-контрмодель, а для логіки тотальних предикатів – лише *F*-контрмодель.

Числення першопорядкових логік із предикатами рівності

Розглянемо особливості побудови секвенційних числень для ЧКНЛ, збагачених спеціальними 0-арними композиціями – параметризованими за іменами предикатами рівності $=_{xy}$. Зауважимо, що можна розглядати як строгу, так і слабку (з точністю до визначеності) рівність. ЧКНЛ з предикатами слабкої рівності вивчались у [2], [5], для відношення $|=_{Cl}$ цих логік на основі *X* – *Y*-означених відношень логічного наслідку побудовано числення секвенційного типу. У даній роботі спеціальні секвенційні числення ЧКНЛ з предикатами слабкої рівності пропонуються для відношень $|=_{Cl}$, $|=_T$, $|=_F$, $|=_{TF}$, при їх побудові будемо використовувати предикати-індикатори εz.

Предикати слабкої рівності $=_{xy}$ визначаються так:

$$T(=_{xy}) = \{d\in{}^VA \mid d(x)\downarrow,\ d(y)\downarrow \text{ та } d(x) = d(y)\};$$
$$F(=_{xy}) = \{d\in{}^VA \mid d(x)\downarrow,\ d(y)\downarrow \text{ та } d(x) \neq d(y)\}.$$

Так визначені предикати $=_{xy}$ є частковими, тому їх розглядаємо в лише в некласичній та загальній семантиках. Надалі предикати $=_{xy}$ позначатимемо $x=y$.

Наведемо основні властивості відношень логічного наслідку для множин формул, пов'язані з предикатами слабкої рівності.

Властивості, пов'язані з рефлексивністю й симетричністю рівності:

Rf) $\Gamma_A|=_{Cl}\Delta, x=x$ та $\Gamma_A|=_F\Delta, x=x$;

RfD) $\neg\varepsilon x, \Gamma_A|=_T\Delta, x=x$ та $\neg\varepsilon x, \Gamma_A|=_{TF}\Delta, x=x$;

Sm) $x=y, \Gamma|=\Delta \Leftrightarrow x=y, y=x, \Gamma|=\Delta$;

Sm¬) $\Gamma|=\Delta, x\neq y \Leftrightarrow \Gamma|=\Delta, x\neq y, y\neq x$.

Властивості Sm і Sm¬ вірні для $|=_{Cl}$, $|=_T$, $|=_F$, $|=_{TF}$; для $|=_{Cl}$ можна обмежитись Sm.

Умови наявності наслідку, пов'язані з предикатами-індикаторами та рівністю:

EL) $\varepsilon x, x=y, \Gamma_A|=_{Cl}\Delta$ та $\varepsilon x, x=y, \Gamma_A|=_T\Delta$;

ER) $\varepsilon x, \Gamma_A|=_{Cl}\Delta, x=y$ та $\varepsilon x, \Gamma_A|=_F\Delta, x=y$;

¬EL) $\varepsilon x, x\neq y, \Gamma_A|=_{Cl}\Delta$ та $\varepsilon x, x\neq y, \Gamma_A|=_T\Delta$;

¬ER) $\varepsilon x, \Gamma_A|=_{Cl}\Delta, x\neq y$ та $\varepsilon x, \Gamma_A|=_F\Delta, x\neq y$.

Для $|=_{Cl}$ можна обмежитись EL та ER.

Наведемо властивості логічного наслідку, пов'язані з транзитивністю рівності.

Tr) $x=y, y=z, x=z, \Gamma|=\Delta \Leftrightarrow x=y, y=z, \Gamma|=\Delta$;

Tr¬) $\Gamma|=\Delta, x\neq y, y\neq z, x\neq z \Leftrightarrow \Gamma|=\Delta, x\neq y, y\neq z$.

Tr вірне для $|=_{Cl}$, $|=_T$ та невірне для $|=_F$; Tr¬ вірне для $|=_{Cl}$, $|=_F$ та невірне для $|=_T$.

Для $|=_T$, $|=_F$, $|=_{TF}$ маємо властивості, які використовують предикати-індикатори:

TrU) $\varepsilon x, x=y, y=z, x=z, \Gamma |= \Delta \Leftrightarrow \varepsilon x, x=y, y=z, \Gamma |= \Delta$;

TrD) $x=y, y=z, x=z, \Gamma |= \Delta, \varepsilon y \Leftrightarrow x=y, y=z, \Gamma |= \Delta, \varepsilon y$;

TrU¬) $\varepsilon x, \Gamma |= \Delta, x\neq y, y\neq z, x\neq z \Leftrightarrow \varepsilon x, \Gamma |= \Delta, x\neq y, y\neq z$;

TrD¬) $\Gamma |= \Delta, x\neq y, y\neq z, x\neq z, \varepsilon y \Leftrightarrow \Gamma |= \Delta, x\neq y, y\neq z, \varepsilon y$.

Наведемо властивості логічного наслідку, пов'язані з заміною рівних:

$E\Phi_{\vdash}$) $x=y, R^{\bar{u},v}_{\bar{z},x}(\Phi), R^{\bar{u},v}_{\bar{z},y}(\Phi), \Gamma |= \Delta \Leftrightarrow x=y, R^{\bar{u},v}_{\bar{z},x}(\Phi), \Gamma |= \Delta$;

$E\Phi_{\dashv}$) $x=y, \Gamma |= \Delta, R^{\bar{u},v}_{\bar{z},x}(\Phi), R^{\bar{u},v}_{\bar{z},y}(\Phi) \Leftrightarrow x=y, \Gamma |= \Delta, R^{\bar{u},v}_{\bar{z},x}(\Phi)$;

$\neg E\Phi_{\vdash}$) $R^{\bar{u},v}_{\bar{z},x}(\Phi), R^{\bar{u},v}_{\bar{z},y}(\Phi), \Gamma |= \Delta, x\neq y \Leftrightarrow R^{\bar{u},v}_{\bar{z},x}(\Phi), \Gamma |= \Delta, x\neq y$;

$\neg E\Phi_{\dashv}$) $\Gamma |= \Delta, R^{\bar{u},v}_{\bar{z},x}(\Phi), R^{\bar{u},v}_{\bar{z},y}(\Phi), x\neq y \Leftrightarrow \Gamma |= \Delta, R^{\bar{u},v}_{\bar{z},x}(\Phi), x\neq y$.

Властивості $E\Phi_{\vdash}$ та $E\Phi_{\dashv}$ вірні для $|=_{Cl}$ та $|=_T$, для $|=_F$ вони невірні; $\neg E\Phi_{\vdash}$ та $\neg E\Phi_{\dashv}$ вірні для $|=_{Cl}$ та $|=_F$, а для $|=_T$ невірні. Для $|=_{Cl}$ можна обмежитись $E\Phi_{\vdash}$ та $E\Phi_{\dashv}$.

Враховуючи, що $\neg R^{\bar{u},v}_{\bar{z},x}(\Phi) \square_{TF} R^{\bar{u},v}_{\bar{z},x}(\neg\Phi)$, для заперечень *R*-формул маємо аналогічні властивості $E\neg\Phi_{\vdash}$, $E\neg\Phi_{\dashv}$, $\neg E\neg\Phi_{\vdash}$, $\neg E\neg\Phi_{\dashv}$. Для $|=_{Cl}$ їх явно не виділяємо.

Наступні властивості для $|=_T$, $|=_F$ та $|=_{TF}$ використовують предикати-індикатори.

$Ed\Phi_{\vdash}$) $x=y, R^{\bar{u},v}_{\bar{z},x}(\Phi), R^{\bar{u},v}_{\bar{z},y}(\Phi), \Gamma |= \Delta, \varepsilon x, \varepsilon y \Leftrightarrow x=y, R^{\bar{u},v}_{\bar{z},x}(\Phi), \Gamma |= \Delta, \varepsilon x, \varepsilon y$;

$Ed\Phi_{\dashv}$) $x=y, \Gamma |= \Delta, R^{\bar{u},v}_{\bar{z},x}(\Phi), R^{\bar{u},v}_{\bar{z},y}(\Phi), \varepsilon x, \varepsilon y \Leftrightarrow x=y, \Gamma |= \Delta, R^{\bar{u},v}_{\bar{z},x}(\Phi), \varepsilon x, \varepsilon y$;

$\neg Ed\Phi_{\vdash}$) $R^{\bar{u},v}_{\bar{z},x}(\Phi), R^{\bar{u},v}_{\bar{z},y}(\Phi), \Gamma |= \Delta, x\neq y, \varepsilon x, \varepsilon y \Leftrightarrow R^{\bar{u},v}_{\bar{z},x}(\Phi), \Gamma |= \Delta, x\neq y, \varepsilon x, \varepsilon y$;

$\neg Ed\Phi_{\dashv}$) $\Gamma |= \Delta, R^{\bar{u},v}_{\bar{z},x}(\Phi), R^{\bar{u},v}_{\bar{z},y}(\Phi), x\neq y, \varepsilon x, \varepsilon y \Leftrightarrow \Gamma |= \Delta, R^{\bar{u},v}_{\bar{z},x}(\Phi), x\neq y, \varepsilon x, \varepsilon y$;

$Un\Phi_{\vdash}$) $\varepsilon x, \varepsilon y, R^{\bar{u},v}_{\bar{z},x}(\Phi), R^{\bar{u},v}_{\bar{z},y}(\Phi), \Gamma |= \Delta \Leftrightarrow \varepsilon x, \varepsilon y, R^{\bar{u},v}_{\bar{z},x}(\Phi), \Gamma |= \Delta$;

$Un\Phi_{\dashv}$) $\varepsilon x, \varepsilon y, \Gamma |= \Delta, R^{\bar{u},v}_{\bar{z},x}(\Phi), R^{\bar{u},v}_{\bar{z},y}(\Phi) \Leftrightarrow \varepsilon x, \varepsilon y, \Gamma |= \Delta, R^{\bar{u},v}_{\bar{z},x}(\Phi)$.

Аналогічні властивості $Ed\neg\Phi_{\vdash}$, $Ed\neg\Phi_{\dashv}$, $\neg Ed\neg\Phi_{\vdash}$, $\neg Ed\neg\Phi_{\dashv}$, $Un\neg\Phi_{\vdash}$, $Un\neg\Phi_{\dashv}$ можна записати для заперечень *R*-формул.

Для опису секвенційних числень ЧКНЛ із предикатами слабкої рівності вкажемо умови замкненості секвенції й базові секвенційні форми.

Передусім наведемо пов'язані з рівністю умови замкненості секвенції Ξ:

CRf) $_{\dashv}x=x \in \Xi$ для деякого $x\in V$ (для *QEC* та *QER*-числень);

CRfD) $_{\dashv}x=x \in \Xi$ та $_{\dashv}\varepsilon x \in \Xi$ для деякого $x\in V$ (для *QEL*, *QELR* та *QEG*-числень);

CEL) $_{\vdash}\varepsilon x \in \Xi$ та $_{\vdash}x=y \in \Xi$ для деяких $x, y \in V$ (для *QEC* та *QEL*-числень);

CER) $_{\vdash}\varepsilon x \in \Xi$ та $_{\dashv}x=y \in \Xi$ для деяких $x, y \in V$ (для *QEC* та *QER*-числень);

C¬EL) $_{\vdash}\varepsilon x \in \Xi$ та $_{\vdash}x\neq y \in \Xi$ для деяких $x, y \in V$ (для *QEL*-числень);

C¬ER) $_{\vdash}\varepsilon x \in \Xi$ та $_{\dashv}x\neq y \in \Xi$ для деяких $x, y \in V$ (для *QER*-числень).

Для ЧКНЛ з рівністю пропонуються наступні секвенційні числення.

Числення *QEC* (формалізує відношення $|=_{Cl}$, неокласична семантика).

Умова замкненості секвенції: $C \vee UnC \vee CRf \vee CEL \vee CER$.

Базовими секвенційними формами є наведені вище форми числення *QSC*. До них додаємо форми, пов'язані з рівністю. Це форми Sm і Tr (симетричність і транзитивність рівності) та форми для заміни рівних:

$_{\vdash}Un\Phi\ \dfrac{_{\vdash}\varepsilon x,\ _{\vdash}\varepsilon y,\ _{\vdash}R^{z,\bar{u}}_{x,\bar{v}}(\Phi),\ _{\vdash}R^{z,\bar{u}}_{y,\bar{v}}(\Phi),\ \Sigma}{_{\vdash}\varepsilon x,\ _{\vdash}\varepsilon y,\ _{\vdash}R^{z,\bar{u}}_{x,\bar{v}}(\Phi),\ \Sigma}$; $_{\dashv}Un\Phi\ \dfrac{_{\vdash}\varepsilon x,\ _{\vdash}\varepsilon y,\ _{\dashv}R^{z,\bar{u}}_{x,\bar{v}}(\Phi),\ _{\dashv}R^{z,\bar{u}}_{y,\bar{v}}(\Phi),\ \Sigma}{_{\vdash}\varepsilon x,\ _{\vdash}\varepsilon y,\ _{\dashv}R^{z,\bar{u}}_{x,\bar{v}}(\Phi),\ \Sigma}$.

$${}_{\vdash}\mathrm{E\Phi}\ \frac{{}_{\vdash}x=y,\ {}_{\vdash}R^{z,\bar{u}}_{x,\bar{v}}(\Phi),\ {}_{\vdash}R^{z,\bar{u}}_{y,\bar{v}}(\Phi),\ \Sigma}{{}_{\vdash}x=y,\ {}_{\vdash}R^{z,\bar{u}}_{x,\bar{v}}(\Phi),\ \Sigma};\qquad {}_{\dashv}\mathrm{E\Phi}\ \frac{{}_{\vdash}x=y,\ {}_{\dashv}R^{z,\bar{u}}_{x,\bar{v}}(\Phi),\ {}_{\dashv}R^{z,\bar{u}}_{y,\bar{v}}(\Phi),\ \Sigma}{{}_{\vdash}x=y,\ {}_{\dashv}R^{z,\bar{u}}_{x,\bar{v}}(\Phi),\ \Sigma}.$$

Числення *QEL* (формалізує відношення $|=_T$, некласична семантика).

Умова замкненості секвенції: $\mathrm{C}\vee\mathrm{CL}\vee\mathrm{UnC}\vee\mathrm{CRfD}\vee\mathrm{CEL}\vee\mathrm{C\neg EL}$.

Базовими секвенційними формами є наведені вище форми числення *QSL*. До них додаємо форми, пов'язані з рівністю. Це форми для врахування симетричності й транзитивності рівності Sm, Sm¬, Tr, TrU¬, TrD¬ та форми для заміни рівних: ${}_{\vdash}$UnΦ, ${}_{\dashv}$UnΦ, ${}_{\vdash}$Un¬Φ, ${}_{\dashv}$Un¬Φ, ${}_{\vdash}$EΦ, ${}_{\dashv}$EΦ, ${}_{\vdash}$E¬Φ, ${}_{\dashv}$E¬Φ, ${}_{\vdash}$¬EdΦ, ${}_{\dashv}$¬EdΦ, ${}_{\vdash}$¬Ed¬Φ, ${}_{\dashv}$¬Ed¬Φ. Форми ${}_{\vdash}$¬EdΦ та ${}_{\dashv}$¬EdΦ такі:

$${}_{\vdash}\neg\mathrm{Ed\Phi}\ \frac{{}_{\dashv}\varepsilon x,\ {}_{\dashv}\varepsilon y,\ {}_{\dashv}x\neq y,\ {}_{\vdash}R^{z,\bar{u}}_{x,\bar{v}}(\Phi),\ {}_{\vdash}R^{z,\bar{u}}_{y,\bar{v}}(\Phi),\ \Sigma}{{}_{\dashv}\varepsilon x,\ {}_{\dashv}\varepsilon y,\ {}_{\dashv}x\neq y,\ {}_{\vdash}R^{z,\bar{u}}_{x,\bar{v}}(\Phi),\ \Sigma};$$

$${}_{\dashv}\neg\mathrm{Ed\Phi}\ \frac{{}_{\dashv}\varepsilon x,\ {}_{\dashv}\varepsilon y,\ {}_{\dashv}x\neq y,\ {}_{\dashv}R^{z,\bar{u}}_{x,\bar{v}}(\Phi),\ {}_{\dashv}R^{z,\bar{u}}_{y,\bar{v}}(\Phi),\ \Sigma}{{}_{\dashv}\varepsilon x,\ {}_{\dashv}\varepsilon y,\ {}_{\dashv}x\neq y,\ {}_{\dashv}R^{z,\bar{u}}_{x,\bar{v}}(\Phi),\ \Sigma}.$$

Форми ${}_{\vdash}$Un¬Φ, ${}_{\dashv}$Un¬Φ, ${}_{\vdash}$E¬Φ, ${}_{\dashv}$E¬Φ, ${}_{\vdash}$¬Ed¬Φ, ${}_{\dashv}$¬Ed¬Φ для заперечень *R*-формул, аналогічні формам ${}_{\vdash}$UnΦ, ${}_{\dashv}$UnΦ, ${}_{\vdash}$EΦ, ${}_{\dashv}$EΦ, ${}_{\vdash}$¬EdΦ, ${}_{\dashv}$¬EdΦ.

Наведемо для прикладу форми ${}_{\vdash}$E¬Φ та ${}_{\dashv}$E¬Φ:

$${}_{\vdash}\mathrm{E\neg\Phi}\ \frac{{}_{\vdash}x=y,\ {}_{\vdash}\neg R^{z,\bar{u}}_{x,\bar{v}}(\Phi),\ {}_{\vdash}\neg R^{z,\bar{u}}_{y,\bar{v}}(\Phi),\ \Sigma}{{}_{\vdash}x=y,\ {}_{\vdash}\neg R^{z,\bar{u}}_{x,\bar{v}}(\Phi),\ \Sigma};\qquad {}_{\dashv}\mathrm{E\neg\Phi}\ \frac{{}_{\vdash}x=y,\ {}_{\dashv}\neg R^{z,\bar{u}}_{x,\bar{v}}(\Phi),\ {}_{\dashv}\neg R^{z,\bar{u}}_{y,\bar{v}}(\Phi),\ \Sigma}{{}_{\vdash}x=y,\ {}_{\dashv}\neg R^{z,\bar{u}}_{x,\bar{v}}(\Phi),\ \Sigma}.$$

Числення *QER* (формалізує відношення $|=_F$, некласична семантика).

Умова замкненості секвенції: $\mathrm{C}\vee\mathrm{CR}\vee\mathrm{UnC}\vee\mathrm{CRf}\vee\mathrm{CER}\vee\mathrm{C\neg ER}$.

Базовими секвенційними формами є форми числення *QSR*, вони такі ж, як форми числення *QSL*. До них додаємо форми, пов'язані з рівністю. Це форми для врахування симетричності й транзитивності рівності Sm, Sm¬, Tr¬, TrU, TrD та форми для заміни рівних: ${}_{\vdash}$UnΦ, ${}_{\dashv}$UnΦ, ${}_{\vdash}$Un¬Φ, ${}_{\dashv}$Un¬Φ, ${}_{\vdash}$¬EΦ ${}_{\dashv}$¬EΦ, ${}_{\vdash}$¬E¬Φ, ${}_{\dashv}$¬E¬Φ, ${}_{\vdash}$EdΦ, ${}_{\dashv}$EdΦ, ${}_{\vdash}$Ed¬Φ, ${}_{\dashv}$Ed¬Φ. Наведемо форми ${}_{\vdash}$¬EdΦ та ${}_{\dashv}$¬EdΦ:

$${}_{\vdash}\mathrm{Ed\Phi}\ \frac{{}_{\dashv}\varepsilon x,\ {}_{\dashv}\varepsilon y,\ {}_{\vdash}x=y,\ {}_{\vdash}R^{z,\bar{u}}_{x,\bar{v}}(\Phi),\ {}_{\vdash}R^{z,\bar{u}}_{y,\bar{v}}(\Phi),\ \Sigma}{{}_{\dashv}\varepsilon x,\ {}_{\dashv}\varepsilon y,\ {}_{\vdash}x=y,\ {}_{\vdash}R^{z,\bar{u}}_{x,\bar{v}}(\Phi),\ \Sigma};$$

$${}_{\dashv}\mathrm{Ed\Phi}\ \frac{{}_{\dashv}\varepsilon x,\ {}_{\dashv}\varepsilon y,\ {}_{\vdash}x=y,\ {}_{\dashv}R^{z,\bar{u}}_{x,\bar{v}}(\Phi),\ {}_{\dashv}R^{z,\bar{u}}_{y,\bar{v}}(\Phi),\ \Sigma}{{}_{\dashv}\varepsilon x,\ {}_{\dashv}\varepsilon y,\ {}_{\vdash}x=y,\ {}_{\dashv}R^{z,\bar{u}}_{x,\bar{v}}(\Phi),\ \Sigma}.$$

Числення *QELR* (формалізує відношення $|=_{TF}$, некласична семантика).

Умова замкненості секвенції: $\mathrm{C}\vee\mathrm{CLR}\vee\mathrm{UnC}\vee\mathrm{CRfD}$.

Базовими секвенційними формами є форми числення *QSLR*, вони такі ж, як форми числення *QSL*. До них додаємо форми, пов'язані з рівністю. Це форми для врахування симетричності й транзитивності рівності Sm, Sm¬, TrU, TrU¬, TrD, TrD¬ та форми для заміни рівних: ${}_{\vdash}$UnΦ, ${}_{\dashv}$UnΦ, ${}_{\vdash}$Un¬Φ, ${}_{\dashv}$Un¬Φ, ${}_{\vdash}$EdΦ, ${}_{\dashv}$EdΦ, ${}_{\vdash}$Ed¬Φ, ${}_{\dashv}$Ed¬Φ, ${}_{\vdash}$¬EdΦ, ${}_{\dashv}$¬EdΦ, ${}_{\vdash}$¬Ed¬Φ, ${}_{\dashv}$¬Ed¬Φ.

Числення *QEG* (формалізує відношення $|=_{TF}$, загальна семантика).

Умова замкненості секвенції: $\mathrm{C}\vee\mathrm{UnC}\vee\mathrm{CRfD}$. Базовими секвенційними формами є форми числення *QSG*, вони такі ж, як форми числення *QSL*. До них додаємо форми, пов'язані з рівністю, вони такі ж, як відповідні форми числення *QELR*.

Процедура побудови секвенційного дерева для числень ЧКНЛ з рівністю в ціло-

му така ж, як процедура побудови дерева для відповідних числень ЧКНЛ. Подібним чином формулються та доводяться теореми коректності та повноти:

Теорема 6. 1) $\Gamma \models_{Cl} \Delta \Leftrightarrow {}_{\vdash}\Gamma_{\dashv}\Delta$ вивідна в численні *QEC*;

2) $\Gamma \models_{T} \Delta \Leftrightarrow {}_{\vdash}\Gamma_{\dashv}\Delta$ вивідна в численні *QEL*;

3) $\Gamma \models_{F} \Delta \Leftrightarrow {}_{\vdash}\Gamma_{\dashv}\Delta$ вивідна в численні *QER*;

4) $\Gamma \models_{TF} \Delta \Leftrightarrow {}_{\vdash}\Gamma_{\dashv}\Delta$ вивідна в численні *QELR*;

5) $\Gamma \models_{TF} \Delta$ в загальній семантиці $\Leftrightarrow {}_{\vdash}\Gamma_{\dashv}\Delta$ вивідна в численні *QEG*.

Висновки

У роботі вивчаються системи логічного виведення композиційно-номінативних логік квазіарних предикатів. Для різних відношень логічного наслідку чистих першопорядкових логік часткових однозначних, тотальних неоднозначних і часткових неоднозначних квазіарних предикатів побудовано числення секвенційного типу. Характерною особливістю цих числень є використання спеціальних предикатів-індикаторів наявності значення для предметних змінних. Для таких числень доведено теореми коректності й повноти. Подібні секвенційні числення запропоновано для чистих першопорядкових логік часткових квазіарних предикатів з рівністю.

Дослідження систем логічного виведення для першопорядкових логік з рівністю планується продовжити в наступних роботах.

Література

1. Нікітченко М.С. Математична логіка та теорія алгоритмів / М.С. Нікітченко, С.С. Шкільняк. – К. : ВПЦ Київський університет, 2008. – 528 с.
2. Нікітченко М.С. Композиційно-номінативні логіки кванторно-екваційного рівня / М.С. Нікітченко, С.С. Шкільняк // Вісник Київського ун-ту. Серія: кібернетика. – 2011. – Вип. 11. – С. 32-40.
3. Шкільняк С.С. Секвенційні числення композиційно-номінативних логік квазіарних предикатів / С.С. Шкільняк // Пробл. програмування. – 2012. – № 2-3. – С. 33-43.
4. Шкільняк С.С. Спеціальні секвенційні числення логік однозначних квазіарних предикатів / С.С. Шкільняк // Вісник Київського ун-ту. Серія: фіз.-мат. науки. – 2012. – Вип. 3. – С. 287-292.
5. Нікітченко М.С. Логіки квазіарних предикатів кванторно-екваційного рівня / М.С. Нікітченко, С.С. Шкільняк // Пробл. програмування. – 2012. – № 4. – С. 19-34.
6. Смирнова Е.Д. Логика и философия / Смирнова Е.Д. – М.: РОССПЕН, 1996. – 304 с.
7. Шкільняк С.С. Відношення логічного наслідку в композиційно-номінативних логіках / С.С. Шкільняк // Пробл. програмування. – 2010. – № 1. – С. 15-38.
8. Шкільняк С.С. Властивості відношень логічного наслідку в логіках квазіарних предикатів / С.С. Шкільняк // Штучний інтелект. – 2013. – № 1.
9. Nikitchenko M. Satisfability and Validity Problems in Many-sorted Composition-Nominative Pure Predicate Logics / M. Nikitchenko, V. Tymofieiev // Comm. in Comp. and Inf. Science. – Springer, 2012. – V. 347. – P. 89-110.

Literature

1. Nikitchenko M.S. Matematychna lohika ta teoria algorytmiv / M.S. Nikitchenko, S.S. Shkilniak. – K. : VPC Kyivskyi universytet, 2008. – 528 p.
2. Nikitchenko M.S. Komposytsijno-nominatyvni lohiky kvantorno-ekvatsijnoho rivnia / M.S. Nikitchenko, S.S. Shkilniak // Visnyk Kyiv. un-tu. Ser. kibernetyka. – 2011. – Vyp. 11. – P. 32-40.
3. Shkilniak S.S. Seqvenciyni chyslennia komposytsijno-nominatyvnyh lohik kvaziarnyh predykativ / S.S. Shkilniak // Probl. programuvannia. – 2012. – № 2-3. – P. 33-43.
4. Shkilniak S.S. Specialni seqvenciyni chyslennia lohik odnoznachnyh kvaziarnyh predykativ / S.S. Shkilniak // Visnyk Kyiv. un-tu. Ser.: phiz.-mat. nauky. – 2012. – Vyp. 3. – P. 287-292.

5. Nikitchenko M.S. Lohiky kvaziarnyh predykativ kvantorno-ekvatsijnoho rivnia / M.S. Nikitchenko, S.S. Shkilniak // Probl. programuvannia. – 2012. – № 4. – P. 19-34.
6. Smirnova E.D. Logika i filosofia / Smirnova E.D. – M.: ROSSPEN, 1996. – 304 p.
7. Shkilniak S.S. Vidnoshennia lohichnogo naslidku v komposytsijno-nominatyvnyh lohikah / S.S. Shkilniak // Probl. programuvannia. – 2010. – № 1. – P. 15-38.
8. Shkilniak S.S. Vlastyvosti vidnoshen lohichnogo naslidku v lohikah kvaziarnyh predykativ / S.S. Shkilniak // Shtucznyj intelekt. – 2013. – № 1.
9. Nikitchenko M. Satisfability and Validity Problems in Many-sorted Composition-Nominative Pure Predicate Logics / M. Nikitchenko, V. Tymofieiev // Comm. in Comp. and Inf. Science. – Springer, 2012. – V. 347. – P. 89-110.

RESUME

S.S. Shkilniak

Construction of Sequent Calculi for First-order Logics of Quasiary Predicates

An effective way to finding proofs is an important problem for solving in modern program and information systems. Sequent (Gentzen) calculi is a powerful formal deduction system. We introduce a number of sequent calculi for various classes of program-oriented logical formalisms – composition-nominative logics of quasiary predicates. Sequent calculi are constructed on the basis of relations of logical consequence for sets of formulas. We specify the following relations of logical consequence: «true-valued» $|=_T$, «false-valued» $|=_F$, «strong» $|=_{TF}$, «irrefutable» $|=_{Cl}$, and «saturated» $|=_{Cm}$.

In this paper we define special sequent calculi for pure first-order logics composition-nominative logics (PCNL) of quasiary predicates. The calculi are proposed for various conseque-nce relations in PCNL of partial single-valued, total multiple-valued and partial multiple-valued predicates. The characteristic feature of this work is using of the special variable definedness predicates εz for description of such calculi.

Calculus *QSC* formalize relation $|=_{Cl}$ (PCNL of partial single-valued predicates) and relation $|=_{Cm}$ (PCNL of total multiple-valued predicates). Calculus *QSL* formalize relation $|=_T$ (PCNL of partial single-valued predicates) and relation $|=_F$ (PCNL of total multiple-valued predicates). Calculus *QSR* formalize relation $|=_F$ (PCNL of partial single-valued predicates) and relation $|=_F$ (PCNL of total multiple-valued predicates). Calculus *QSLR* formalize relation $|=_{TF}$ (PCNL of partial single-valued predicates and of total multiple-valued predicates). Calculus *QSG* formalize relation $|=_{TF}$ (PCNL of partial multiple-valued predicates).

For these calculi soundness and completeness theorems are proved.

We propose series of sequent calculi for pure first-order logics of partial predicates with equality. Calculus *QEC* formalize relation $|=_{Cl}$, calculus *QEL* formalize relation $|=_T$, calculus *QER* formalize relation $|=_F$, calculus *QELR* formalize relation $|=_{TF}$ (logics of partial single-valued predicates). Calculus *QEG* formalize relation $|=_{TF}$ for logics of partial multiple-valued predicates.

Theorem (soundness and completeness).

1) $\Gamma |=_{Cl} \Delta \Leftrightarrow$ sequent $_{|-}\Gamma_{-|}\Delta$ is derivable in *QEC* calculus;

2) $\Gamma |=_{T} \Delta \Leftrightarrow$ sequent $_{|-}\Gamma_{-|}\Delta$ is derivable in *QEL* calculus;

3) $\Gamma |=_{F} \Delta \Leftrightarrow$ sequent $_{|-}\Gamma_{-|}\Delta$ is derivable in *QER* calculus;

4) $\Gamma |=_{TF} \Delta \Leftrightarrow$ sequent $_{|-}\Gamma_{-|}\Delta$ is derivable in *QELR* calculus;

5) $\Gamma |=_{TF} \Delta$ in logic of partial multiple-valued predicates $\Leftrightarrow$ sequent $_{|-}\Gamma_{-|}\Delta$ is derivable in *QEG* caluculus. Investigation of logical reasoning systems for first-order logics with equality is planned for the further study in the next papers.

Стаття надійшла до редакції 16.04.2013.